

调节阀的数学模型与稳定性分析

徐升茂 高芸 刘超颖

(自动化系 天津 300160)

摘要: 本文通过对调节阀的流量特性分析,建立了不平衡力与阀杆位移量之间的近似关系,再以阀杆位移增大方向为参考正方向建立调节阀的数学模型与特征方程,并通过选取使主对角线元素不为零的待定系数状态方程,直接利用克拉索夫斯基(Krasovskii)定理对系统进行分析,得出李雅普诺夫(Lyapunov)函数和渐近稳定条件,最后对四种不同组合的调节阀的稳定性给出结论。

关键词: 调节阀,不平衡力,克拉索夫斯基(Krasovskii)定理,李雅普诺夫(Lyapunov)函数,渐近稳定,数学模型,稳定性分析。

The Mathematic Model and the Analysis of Stabilitation for Control Valve

Xu Shengmao Gao Yun Liu Chaoying

(Dept. of Ind. Autom. Eng.) (Dept. of mech. Eng.)

Abstract: In this paper the approximate relations between the unbalanced force and the displacement of valve rod are set up in terms of analysis of the flow characteristic of control valve, and then the mathematic model and the characteristic equation of control valve are developed with determining the direction of displacement inement as the reference direction, and the Lyapunov function and the condition of the asymptotic stability are derived through the selection state equation of undetermined coefficient having nonzero main diagonal elements and the analysis of the system by Krasovskii theorem. At last, there is the conclusion of stability of four variant combination control valvas.

Key words: Control Valve, Unbalance Force, Krasovskii theorem, Lyapunov function, Asymptotic Stability, Mathematic Model, Analysis of Stabilitation.

收稿时间: 1994-01-03; 徐升茂, 男 47 岁, 讲师。

随着自动化技术在工业上的广泛应用,调节阀作为工业过程自动化的终端设备使用更加普遍,现在使用的有气动调节阀,电动调节阀和数字调节阀。但现在对调节阀的数学模型描述比较粗糙,有的不考虑不平衡力建立线性数学模型^[1],有的对不平衡力只是定性加以说明^[2]或用图形加以说明^[3],有的对稳定性只进行定性分析^[4]。这远不能满足调节阀的设计、研究、制造及使用的要求。

我们通过调节阀的流量特性建立不平衡力与阀芯位移之间的关系,进而建立调节阀的数学模型。再对得出的非线性特征方程进行稳定性分析,得出结论。为了便于分析,我们对气动调节阀进行分析,但其方法与结论对其它类型调节阀也有一定的指导意义。

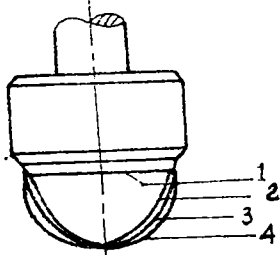


图 1 调节阀阀芯形状

1. 快开; 2. 直线
3. 抛物线; 4. 等面百分比(对数)

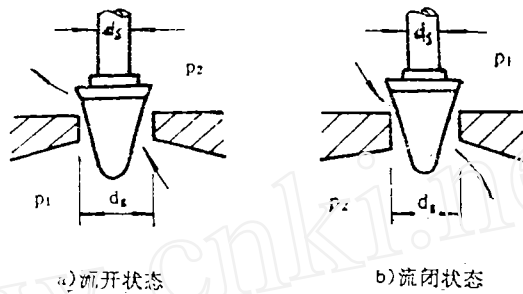


图 2 直通单座阀阀芯不平衡力分析

1 建立调节阀数学模型的基础

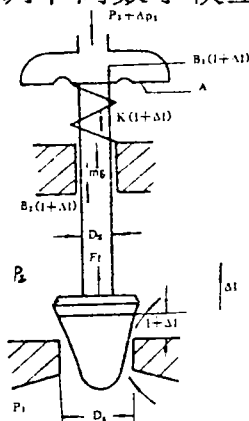


图 3

调节阀前后压差一定时的流量特性叫固有流量特性,它完全由阀芯的形状所决定^[3]。典型固有流量特性有直线、等百分比(对数)、抛物线及快开四种,其相应的柱塞阀阀芯形状如图 1 所示。

当流体通过调节阀时,由于流体静压和动压的作用,阀芯受到使其上下移动的轴向力和旋转运动的切向力。

对于直行程调节阀,把阀芯受到的轴向力称为不平衡力。为了方便分析,我们以直通单座阀为例,对图 2 所示流开和流闭状态不平衡力来分析:

在流开状态下,阀杆处于流体的流出端,当压差不变时,某一开度阀芯所受的不平衡力应等于阀芯处分布压力与相应的阀芯截面积积分的结果,这是很难求的,为了使问题简化,我们把不平衡力近似为压力 P_1 和 P_2 与等效阀芯截面积 S_1 作用的结果,即:

$$\begin{aligned} F_1 &= P_1 S_1 - P_2 \left(S_1 - \frac{\pi}{4} d_s^2 \right) \\ &= \Delta P \cdot S_1 + \frac{\pi}{4} d_s^2 P_2 \end{aligned} \quad (1)$$

式中:

P_1, P_2 ——为阀前,后的压力;

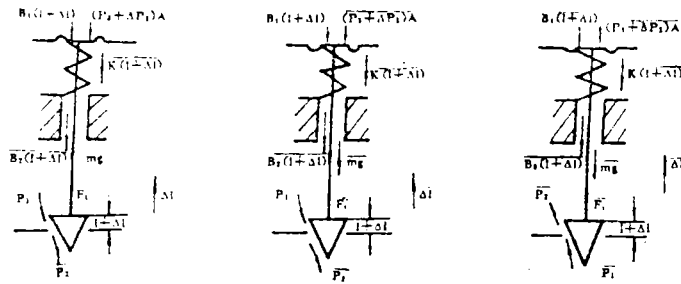


图 4 正作用流闭式直通阀 图 5 反作用流闭式直通阀 图 6 反作用流开式直通阀

$\Delta P_1 = P_1 - P_2$ ——阀前后的压差；
 S_1 ——某一开度等效阀芯截面积；
 ds ——阀杆的直径。

阀芯所受的不平衡力随着等效阀芯的截面积变化而变化，而等效阀芯截面积又随其阀杆的位移量（开度）的变化而变化。当位移量 l 为零，阀芯全关时，阀芯截面积最大，不平衡力最大为：

$$S_{max} = \frac{\pi}{4} dg^2 \tag{2}$$

$$F_{1max} = P_1 \frac{\pi}{4} dg^2 - P_2 \frac{\pi}{4} (dg^2 - ds^2) = \Delta P S_{max} + P_2 \frac{\pi}{4} ds^2 \tag{3}$$

dg ——阀芯的直径。

当位移量 l 最大时阀芯全开，阀芯截面积最小（为零），不平衡力最小。为了使问题简化，我们对 S_1 与 l 之间的关系取台劳（Taylor）展开形式，并令参数 b'_0, b_1, b_2 为正值，并取二阶近似即：

$$S_1 = f(l) = b'_0 - b_1 l - b_2 l^2 - 0(l^3) \tag{4}$$

代入（1）式化简

$$F_1 = \Delta P [b'_0 - b_1 l - b_2 l^2 - 0(l^3)] + \frac{\pi}{4} ds^2 P_2 \tag{5}$$

而在流闭状态下（图 2b）阀杆处于流体的流入端，同理可得其不平衡力为

$$F_1 = P_2 S_1 - P_1 (S_1 - \frac{\pi}{4} ds^2) = -\Delta P [b'_0 - b_1 l - b_2 l^2 - 0(l^3)] + \frac{\pi}{4} ds^2 P_1 \tag{6}$$

在阀芯全关时其不平衡力为

$$F_m = -\Delta P \frac{\pi}{4} dg^2 + P_1 \frac{\pi}{4} ds^2 \tag{7}$$

2 调节阀的数学模型

调节阀的数学模型与执行机构有着密切关系，现在以薄膜执行机构和直通单座阀为例进行分析，以期得出一般性结论。正作用流开式薄膜直通单座阀受力情况如图 3：

图中:

- P_1 ——阀前压力;
- P_2 ——阀后压力;
- P_3 ——气动执行器输入压力;
- A ——膜片有效面积;
- B_1 ——气室阻尼系数;
- B_2 ——粘性摩擦系数;
- m ——阀芯, 阀杆等活动部件的质量;
- g ——重力加速度;
- k ——弹簧的刚性系数;
- D_s ——阀杆的直径;
- D_s ——阀芯的直径;
- l ——阀杆(阀芯)的位移量;
- ΔP_3 ——输入压力的微小变化量;
- Δl ——位移量对其稳定态值(平衡点)的微小变化量。

我们规定以阀的开度增大方向为位移变化的正方向, 并以此为力的参考正方向。其中 mg 为重力, $(P_3 + \Delta P_3)A$ 为输入压力作用在膜片上产生的输入力, F_t 为阀芯所受的不平衡力, $K(1 + \Delta l)$ 为弹簧的弹力, $(B_1 + B_2) \frac{d(1 + \Delta l)}{dt}$ 为阻尼力, 弹力和阻尼力与位移变化方向相反。根据牛顿定律, 可以得到:

$$m \frac{d^2(1 + \Delta l)}{dt^2} = - (P_3 + \Delta P_3) A - mg - (B_1 + B_2) \frac{d(1 + \Delta l)}{dt} - K(1 + \Delta l) + F_t \quad (8)$$

把式(5)代入并略去高次项

$$m \frac{d^2(1 + \Delta l)}{dt^2} = - (P_2 + \Delta P_3) A - mg - (B_1 + B_2) \frac{d(1 + \Delta l)}{dt} - K(1 + \Delta l) + \Delta P [b'_0 - b_1 l - b_2 l - 0(l^3)] + \frac{\pi}{4} d_s^2 P_2 \quad (9)$$

对于某一平衡点其变化量为

$$m \frac{d^2(1 + \Delta l)}{dt^2} + (B_1 + B_2) \frac{d(1 + \Delta l)}{dt} + (K + \Delta P \cdot b'_1) \Delta l + \Delta P \cdot b'_2 \Delta l^2 = -A \Delta P_3 \quad (10)$$

式中 $b'_1 = b_1 + 2l \cdot b_2$

其特征方程为

$$m \frac{d^2 \Delta l}{dt^2} + (B_1 + B_2) \frac{d \Delta l}{dt} + (K + \Delta P \cdot b'_1) \Delta l + \Delta P \cdot b'_2 \Delta l^2 = 0 \quad (11)$$

同理我们可以对图 4 所示的正作用流闭式直通阀进行分析, 得到

$$m \frac{d^2(1 + \Delta l)}{dt^2} = - (P_3 + \Delta P_3) A - mg - (B_1 + B_2) \frac{d(1 + \Delta l)}{dt} - K(1 + \Delta l) + F_t \quad (12)$$

把式 6 代入并化简特征方程为:

$$m \frac{d^2 \Delta l}{dt^2} + (B_1 + B_2) \frac{d \Delta l}{dt} - (K - b'_1 \Delta P) \Delta l - \Delta P b_2 \Delta l^2 = 0 \quad (13)$$

同理对图 5 所示的反作用流闭式单座直通阀和图 6 所示的反作用流开式单座直通阀进行分析可分别得到它们的特征方程为:

$$m \frac{d^2 \Delta l}{dt^2} + (B_1 + B_2) \frac{d \Delta l}{dt} + (K - b' \Delta P) \Delta l - \Delta P b_2 \Delta l^2 = 0 \quad (14)$$

$$m \frac{d^2 \Delta l}{dt^2} + (B_1 + B_2) \frac{d \Delta l}{dt} + (K + b' \Delta P) \Delta l + \Delta P b_2 \Delta l^2 = 0 \quad (15)$$

式 11、13、14 和 15 可以化简为

$$x + a_1 x + a_2 x + a_3 x^2 = 0 \quad (16)$$

$$\text{式中 } x = \Delta l, a_1 = \frac{B_1 + B_2}{m}, a_2 = \frac{K \pm b' \Delta P}{\Delta P}, a_3 = \pm \frac{b_2 \Delta P}{m}$$

3 稳定性分析

由式 16 表示的特征方程系统是一个非线性系统,为了研究这个系统的稳定性,我们采用状态空间法,利用李雅普诺夫 (Lyapunov) 稳定理论来研究 [5].

定理: 对于一个非线性系统 $\dot{x} = F(x)$ 式中 x 为 n 维向量, 假设 $F(0) = 0$, 且 $F(x)$ 对于 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 是可微的, 系统的雅可比 (Jaobian) 矩阵 $J(x)$ 为

$$J(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

如果存在一个对称的定常正定矩阵 P 使对称矩阵 $S(x) = PJ(x) + J^T(x)P$ 是负定的, 那么平衡状态 $x=0$ 是渐近稳定的, 这个系统的李雅普诺夫函数为 $V(x) = F^T(x)PF(x)$.

如果随着 $V(x) = F^T(x)PF(x)$.

如果随着 $\|x\| \rightarrow \infty$, 有 $V(x) \rightarrow \infty$, 则平衡状态 $x=0$ 是大范围渐近稳定的.

当 P 为单位矩阵时, 即克拉索夫斯基 (Kraosvsii) 定理.

如果用 X 和 \dot{X} 为状态普量的状态方程, 由于 $J(x)$ 矩阵主对角线有零, 不能直接采用克拉索夫斯基定理, 只能设一组使 $J(x)$ 矩阵的主对角线不为零的状态, 这样就只需二个参数, 并把问题解释清楚.

由式 23, 令 $x_1 = x$

$$\dot{x} = -c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (17)$$

$$\text{所以 } c_2 x_2 = x_1 + c_1 x_1 = -a_1 - a_2 x_1 - a_3 x_1^2 + c_1 x_1 \quad (18)$$

$$\text{令 } c_2 \neq 0, c_1 c_2 \text{ 为待定系数} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 x_1 & +c_2 x_2 \\ \frac{x_1}{c_2} [c_1 (a_1 - c_1) - a_2 - a_3 x_1] + x_2 (c_1 - a_1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} -c_1 & c_2 \\ \frac{1}{c_2} [c_1 (a_1 - c_1) - a_2 - 2a_3 x_1] & c_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$S(x) = \begin{bmatrix} -2c_1 & c_2 + \frac{1}{c_2} [c_1(a_1 - c_1) - a_1 - 2a_3x_1] \\ c_2 + \frac{1}{c_2} [c_1(a_1 - c_1) - a_2 - 2a_3x_1] & 2(c_1 - a_1) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$S(x)$ 为负定的条件是:

$$P_{11} = -2c_1 < 0 \quad \therefore c_1 > 0 \quad (22)$$

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$-2c_1 \cdot 2(c_1 - a_1) - \left\{ c_2 + \frac{1}{c_2} [c_1(a_1 - c_1) - a_2 - 2a_3x_1] \right\}^2 > 0 \quad (23)$$

$$\therefore a_1 - c_1 > 0 \quad \therefore 0 < c_1 < a_1 \quad (24)$$

$$\therefore 2\sqrt{c_1(a_1 - c_1)} > \left| c_2 + \frac{1}{c_2} [c_1(a_1 - c_1) - a_2 - 2a_3x_1] \right| \quad (25)$$

令 $c_2 > 0$

$$\therefore c_2^2 - 2c_2\sqrt{c_1(a_1 - c_1)} + c_1(a_1 - c_1) - a_2 < 2a_3x_1 < c_2^2 + 2c_2\sqrt{c_1(a_1 - c_1)} + c_1(a_1 - c_1) - a_2 \quad (26)$$

$$\therefore [c_2 - \sqrt{c_1(a_1 - c_1)}]^2 - a_2 < 2a_3x_1 < [c_2 + \sqrt{c_1(a_1 - c_1)}]^2 - a_2 \quad (27)$$

当 $a_3 \leq 0$, 正数 $1 < 2a_3x_1 < 2$, 因此无论 a_3 为何值, $x_1 = 0$ 都不可能包括在邻域中, 所以 a_2 只能为正数, $a_2 > 0$.

当 $a_3 \neq 0$, 总可以找到适合的邻域, $X = 0$ 为渐近稳定.

$a_3 = 0$, 则 $X = 0$ 为大范围渐近稳定.

其李雅普诺夫函数为

$$V(X) = (-c_1x_2 + c_2x_2)^2 + \left\{ \frac{1}{c_2} [c_1(a_1 - c_1)x_1 - a_2x_1 - a_3x_1^2] + (c_1 - a_1)x_2 \right\}^2 \quad (28)$$

因此只要系统 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 \neq 0$ 系统在平衡状态 $X = 0$ 处渐近稳定, 其稳定域受 a_1 , a_2 的影响.

4 结论:

对于四种不同组合的执行机构和阀组成的调节阀, 无论正, 反作用执行机构, 对于流开式调节阀, 由式 11, 15 可知 $a_2 = \frac{K + b'_1 \Delta P}{m} > 0$, 系统是渐近稳定的, 对于流闭式调节阀, 由式 13, 14 可知 $a_2 = \frac{K - b'_1 \Delta P}{m}$, 只有 $K > b'_1 \Delta P$, 才是渐近稳定的, 即系统是有条件渐近稳定的. 适当提高弹簧的刚度, 降低阀前、后压力差, 及改善阀芯形状对提高稳定条件是有益的, 为了提高稳定域, 就必须提高 a_1 , 由式 16 中 $a_1 = \frac{B_1 + B_2}{m}$ 减少活动部件的质量, 提高阻尼系数和粘性摩擦系数, 对提高稳定域是有益的. 因此适当选择弹性系数, 活动部件的质量, 阀前、后压力差, 阀芯形状及阻尼系数与粘性摩擦系数, 使其稳定域大到工作的范围, 对调节阀设计, 使用都有一定的指导意义.

参 考 文 献

- 1 绪方胜彦. 现代控制工程. 北京: 科学出版社, 1980
- 2 [罗]瓦. 马留诺尤. 调节阀. 北京: 化工出版社, 1985
- 3 黄楨地等. 过程控制仪表. 杭州: 浙江大学出版社, 1987
- 4 余善富. 气动执行器. 北京机械工业出版社, 1989
- 5 刘豹. 理代控制理论. 北京: 机械工业出版社, 1987

1992年《EI》收录的天津高校科技论文分布情况

高校名称	EI 收录数	全国位次
南开大学	61	12
天津大学	28	28
天津理工学院	4	75
天津纺织工学院	3	92
天津轻工业学院	1	139
中国民航学院	1	139

1992年《ISTP》收录的天津高校科技论文分布情况

高校名称	ISTP 收录数	全国位次
天津大学	70	15
南开大学	22	41
天津理工学院	3	121
天津师范大学	3	121
天津纺织工学院	2	137
天津轻工业学院	1	201
天津医学院	1	201